Version Unité Nomade

TI – *n*spire,
Le tout en un des mathématiques

Expérimentations sur les lignes de niveau.

Formation T^3 à l'Athénée Royal Gatti de Gamond – Nov. 2008

Hugues Vermeiren

T^3 Wallonie http://www.t3wallonie.be/

Construction d'une ligne de niveau et expérimentation.

L'activité proposée en ces pages n'est pas, mathématiquement, très ambitieuse. Elle présente une technique rendue possible grâce à la géométrie dynamique, technique qui favorise l'exploration et l'expérimentation.
Le traitement des deux exemples cités ne se veut pas complet et peut tout au plus servir de tremplin vers un véritable approche mathématique.

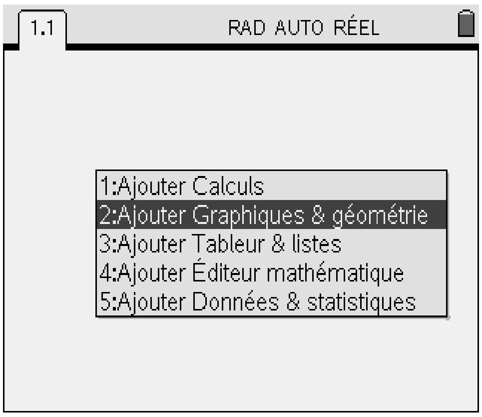
On appelle « Ligne de Niveau »[1] le lieu d'un point A tel qu'une certaine expression numérique $f(A, e_i)=k$ liant ce point à d'autres éléments $e_i, i=1,\ldots,n$ de la figure soit constante.
Une ligne de niveau n'est donc rien d'autre qu'un cas particulier de lieu.
Si la relation $f=k$ ne fait intervenir que les coordonnées cartésiennes (polaires)de A ainsi que des paramètres, la ligne de niveau est une courbe donnée par son équation cartésienne (resp. polaire).

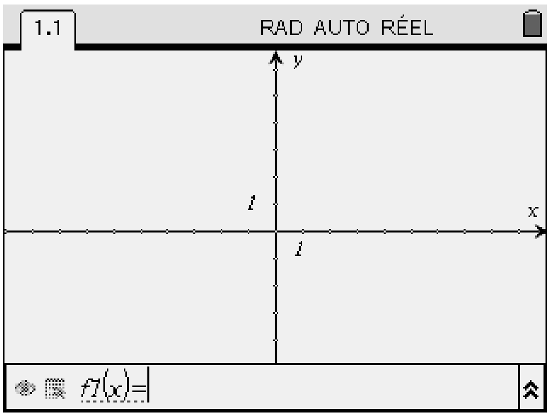
Par exemple:

- La ligne de niveau $AB=AC$ où B et C sont donnés est la médiatrice du segment *[BC]*.
- La ligne de niveau $\vec{CB}\cdot\vec{CA}=k, k\in\mathbb{R}$ est la perpendiculaire à la droite *(BC)* passant par *A*.
- La ligne de niveau $\widehat{BAC}=\alpha$, $\alpha\in[0,2\pi]$ est un lieu bien connu... dont nous allons nous occuper ici.

1. L'arc capable.

Cherchons donc le lieu du point A tel que $\widehat{BAC}=\alpha$
Démarrons l'unité nomade off/on et enfonçons les touches ctrl menu 9:Nouveau classeur.
L'unité demande alors si on désire ou non sauvegarder le classeur en cours. Le choix est ici indifférent.

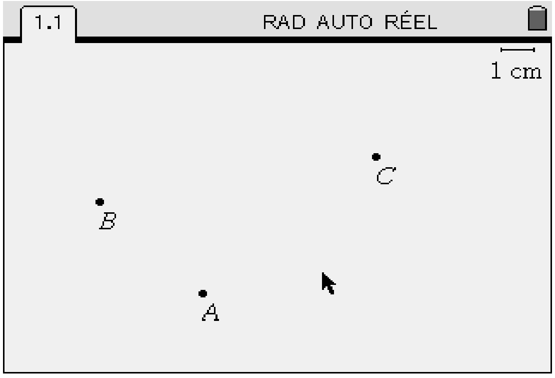




En sélectionnant l'option 2: Ajouter Graphique & géométrie , on crée une page de Géométrie dynamique (on parle de pages G&G).
Notre problème ne nécessite ni coordonnées, ni représentation de fonction. Commençons donc par afficher le « plan géométrique »; dans ce plan, les coordonnées des points ainsi que les équations des droites et cercles n'existent plus. Seuls subsistent les longueurs de segments, les aires de polygones et de cercles, les mesures d'angles,... Le « plan géométrique » est le domaine

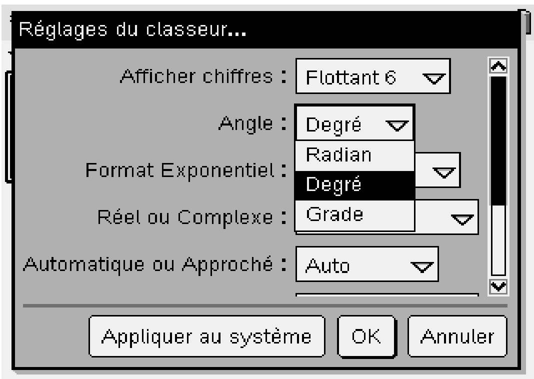
1 L'expression « ligne de niveau » est surtout utilisé dans les programmes français.

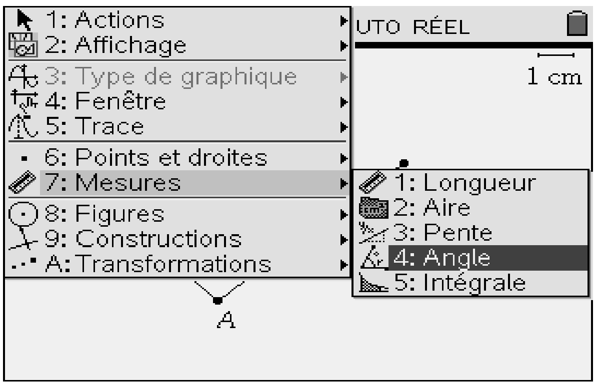
de la géométrie synthétique.
Ce plan est affiché grâce à la séquence de touches menu 1: Actions 2 : Afficher le plan géométrique.
Plaçons trois points dans ce plan: menu 6: Points et Droites 1: Point
Déposons ainsi trois points en les baptisant A, B et C dès que leur emplacement est déterminé en appuyant sur la touche ou la touche enter :



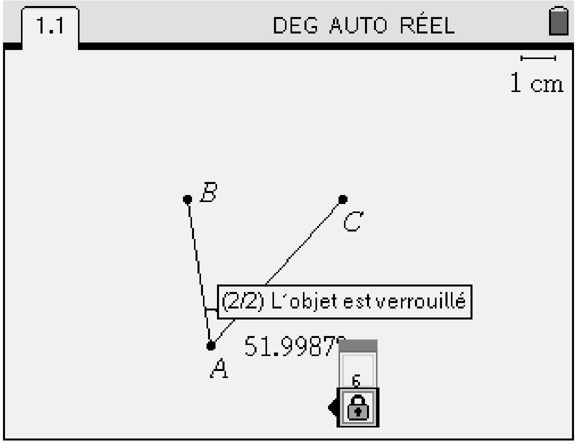
Traçons les segments [AB] et [AC] : menu 6: Points et Droites 5: Segment

Mesurons l'angle $\widehat{ABC}$. Il peut être utile de travailler en degrés plutôt qu'en radians, selon la classe, ce qui nécessite une modification des réglages du classeur. Pour cela, on remonte d'un niveau dans la hierarchie des fichiers de l'unité : ctrl ▲ suivis de menu 5: Réglages du classeur
On passe d'un champ à l'autre avec la touche tab , on modifie avec ▲ ou ▼ et on valide avec le champ **OK**. On doit ensuite réouvrir la page G&G.
L'angle $\widehat{ABC}$ est construit avec la commande menu 7: Mesures 4: Angle

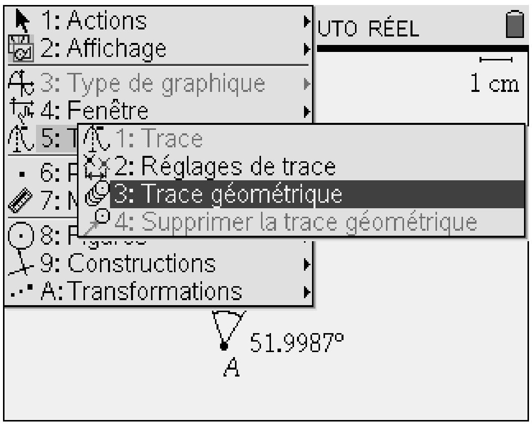




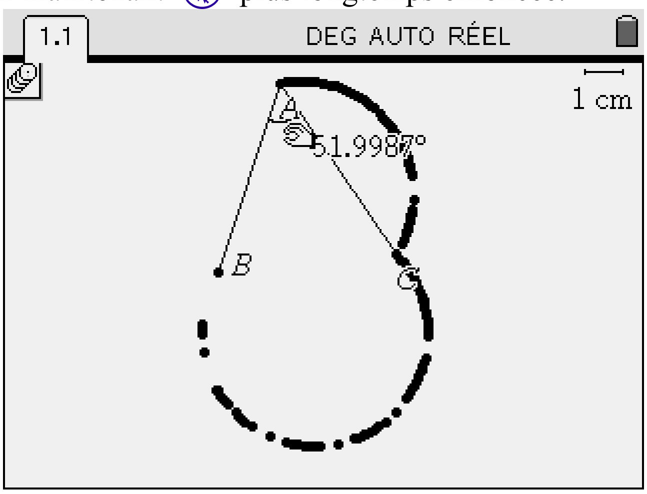
L'angle étant mesuré, on sélectionne sa mesure en approchant le pointeur et en cliquant la touche du « Navpad ». On ouvre alors le menu contextuel avec les touches ctrl menu et on sélectionne l'option 2: Attributs.



L'angle est verrouillé en modifiant l'option dont l'icône est un petit cadenas fermé (valider avec ou enter). Cet angle étant verrouillé, si le point A est déplacé, il ne pourra le faire que si l'angle $\widehat{ABC}$ est maintenu constant.
En activant la trace géométrique du point A, on découvre expérimentalement le lieu cherché: menu 5: Trace 3: Trace géométrique.



On sélectionne le point A une première fois pour indiquer qu'on désire qu'il laisse une trace là où il se déplace (Touches de direction [Navpad] +) et une seconde fois en cliquant sur ctrl et ensuite sur , ou en maintenant plus longtemps enfoncée.



On reconnaît le double arc capable d'angle α et d'extrémités B et C.
Cette technique consistant à verrouiller une expression calculée pour explorer un lieu défini par

une relation numérique est simple et très différente de celle mise en oeuvre pour construire un lieu défini géométriquement (menu 9: Constructions 6 : Lieu).

Attention: nous avons simplement observé le lieu décrit par A quand l'angle $\widehat{ABC}$ de la figure initiale restait constant. Cet angle n'était pas imposé, il a été pris tel quel. Le lieu décrit par A pour un angle $\widehat{ABC}$ imposé (par exemple 65°) n'a donc pas été construit. La construction de l'arc capable est un exercice classique de géométrie dynamique, non repris dans cette activité.

2. Un produit scalaire constant.

Deux points B et C sont donnés. Quel est le lieu du point A tel que $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=k\,,k\in\mathbb{R}$ [2]?
La méthode du « nombre verrouillé » permet sans difficulté d'émettre certaines conjectures.

On sait que $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=AB\times AC\times\cos(\alpha)$.

Pour découvrir la ligne de niveau $\vec{AB}\cdot\vec{AC}=k$, il suffira donc de:

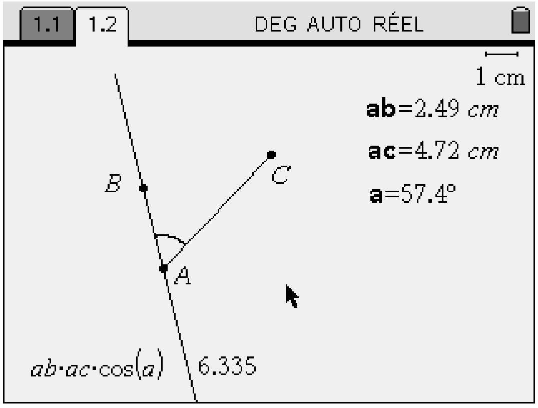
- Construire les points A, B, C et les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$
  menu 6: Points et droites 1: Point
  menu 6: Points et droites 8 : Vecteur
- Mesurer les longueurs AB et AC
  menu 7: Mesures 1 : Longueur
- Mesurer l'angle $\widehat{BAC}$
  menu 7: Mesures 4 : Angle (sélectionner les points B,A et C dans cet ordre)
- Placer les mesures de *[AB]* et *[AC]* dans des variables[3] **ab** et **ac**. Et celle de l'angle $\widehat{BAC}$ dans la variable **a**.
  Sélectionner le nombre + ctrl sto→ var + taper un nom de variable (ici ab, ac et a)
- Déposer le texte « ab.ac.cos(a) »
  menu 1: Actions 6 : Texte + déposer le nombre obtenu en validant avec
- Evaluer ce texte
  menu 1: Actions 8 : Calculer
  L'unité demande de confirmer le lien « L » (Link) entre les variables TI-*n*spire et celles du texte à calculer.
  Attention : sur la version 1.4. , il vaut mieux pointer vers la variable (qui apparaît alors sur fond grisé) et valider avec ou enter plutôt que de valider immédiatement sans pointer vers les variables.
- Verrouiller le nombre ainsi obtenu.
  Sélectionner le nombre, ouvrir le menu contextuel clear menu 2: Attributs, verrouiller le petit cadenas et valider .
- Activer la *trace géométrique* du point A.
  menu 5: Trace 3 : Trace géométrique + sélectionner A (A clignote, sa trace est active)
- Déplacer le point A (Attention: la commande de trace géométrique doit rester active)
  On re-sélectionne A en pointant vers A *,* en appuyant sur ctrl et ensuite sur .

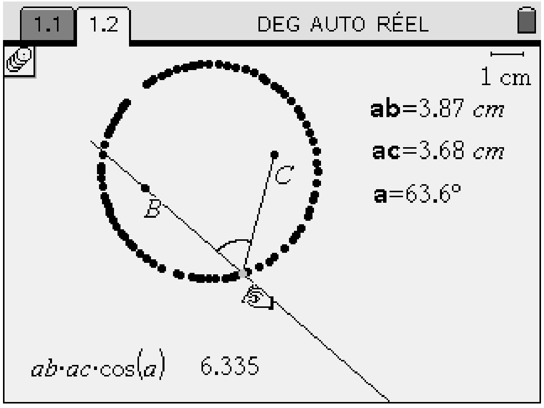
Remarque: une expérimentation directe sans verrouillage du produit scalaire est difficile à exploiter ; le produit scalaire s'avère être assez sensible aux petits mouvements du point A. C'est

2 Pour une solution complète voir Géométrie de l'espace et du plan, Yvonne et René Sortais, Hermann 1988, p 203.
3 Les noms de variables TI-*n*spire sont toujours des minuscules.

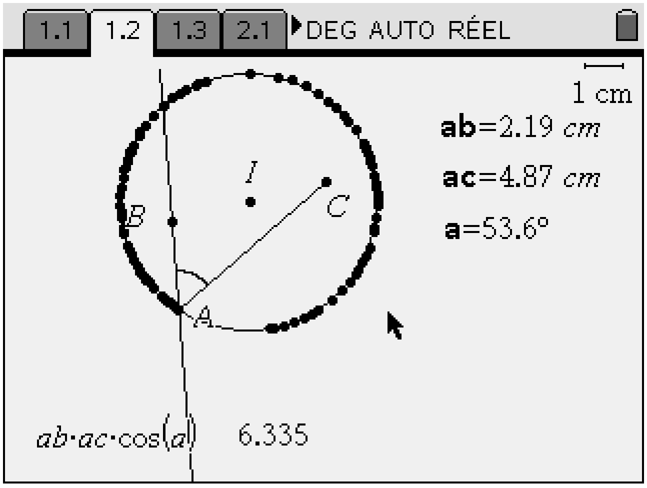
encore plus vrai sur l'unité nomade...

Voici ce que peut donner cette construction avant et après la construction de la trace:





Les conjectures concernant ce lieu (ou ligne de niveau) s'imposent d'elles-mêmes...
Une dernière confirmation peut être apportée en traçant le cercle de centre *I* milieu de *[BC]* passant par *A* : la trace laissée par le point *A* semble bien être située sur ce cercle.

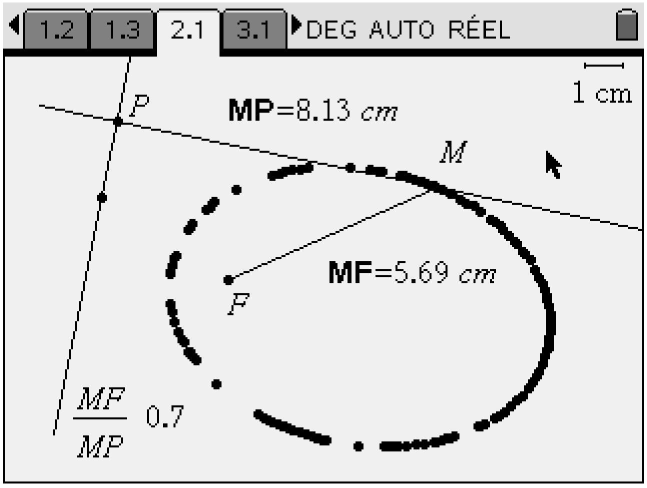


Aux élèves d'enchaîner les démonstrations sous la conduite du professeur.

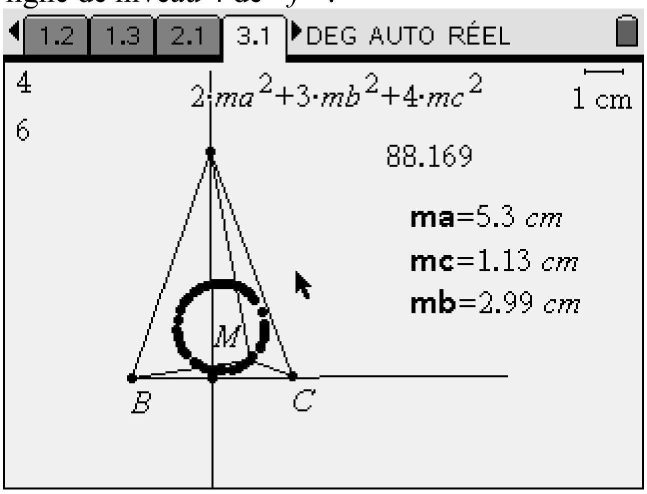
3. Quelques exercices...

1. Étudier la ligne de niveau $\frac{MA}{MB}=k\ ,\ k>0$

2. Étudier la ligne de niveau $\frac{MF}{MP}=k\ ,\ k>0$ où F est fixé et P est le pied de la perpendiculaire abaissée de M sur une droite donnée d.
   On reconnaît là la définition d'une conique à l'aide d'un foyer et d'une directrice...



3. Tiré d'un manuel de Terminale C et E[4] :
   ABC est un triangle isocèle tel que $AB=AC=6\,cm$ et $BC=6\,cm$
   On définit l'application $f: M\rightarrow f(M)=2\cdot MA^2+3\cdot MB^2+3\cdot MC^2$
   Déterminer les lignes de niveau $f(M)=72$ et $f(M)=88$.
   Existe-t-il une ligne de niveau passant par B et C ?
   Existe-t-il une ligne de niveau 4 de f ?



4 Mathématique Collection FRACTALE Algèbre et Géométrie, Terminale C et E – Bordas, 1991.