# Résolution d’un exercice de probabilités

*Issu de la Collection Terracher TS - Hachette.*

**Lorsque les éléphants sautent en parachute au-dessus de la savane, ils chaussent des raquettes pour ne pas s’enliser.**

**Il y a deux types d'équipement pour pachydermes :**

**quatre raquettes à petits tamis (une à chaque patte)**
**ou**
**deux raquettes à grand tamis (pattes postérieures).**

Les fixations sont les mêmes pour les deux types de raquettes et la probabilité pour qu’une fixation se détache avant le contact avec le sol est ***p***. Un éléphant (malchanceux) s’enlise s’il a perdu plus de la moitié de son équipement,

1. Quelles sont les probabilités *Pr1* et *Pr2* pour qu’un éléphant s’enlise s’il saute avec 4 raquettes à petits tamis ou s’il saute avec 2 raquettes. Comparer *Pr1* et *Pr2* en fonction de ***p***.

2. Vérifier sur des exemples (***p*** = 1/3, ***p*** = 0.6 et ***p*** = 0.9)) les formules de l’espérance mathématique et de la variance pour la loi de probabilité de la variable ***X*** (nombre de raquettes perdues) lors d'un saut à quatre raquettes

## 1. <u>Calcul des probabilités et comparaison.</u>

- *<u>Avec 4 raquettes</u> :* notons ***X*** le nombre de raquettes que l’éléphant a perdues.

La probabilité qu'il s'enlise, notée <u>*Pr1*</u> c'est la probabilité qu'il ait perdu <u>plus de 2 raquettes</u> à l’arrivée (donc 3 ou 4).

*Pr1* = prob(***X*** = 4) + prob(***X*** = 3) ou *Pr1* = $\boldsymbol{C}_4^4\ \boldsymbol{p}^4\cdot(1-\boldsymbol{p})^0+\boldsymbol{C}_4^3\ \boldsymbol{p}^3\cdot(1-\boldsymbol{p})^1=4\boldsymbol{p}^3-3\boldsymbol{p}^4$

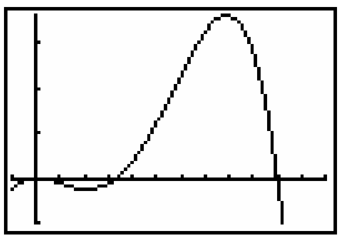
- *<u>Avec 2 raquettes</u>* : notons ***X*** le nombre de raquettes que l’éléphant a perdues.

La probabilité qu'il s'enlise, notée <u>*Pr2*</u> est la probabilité qu'il ait perdu <u>ses 2 raquettes</u> à l’arrivée.

*Pr2* = prob(***X*** = 2) ou *Pr2* = $\boldsymbol{C}_2^2\ \boldsymbol{p}^2\cdot(1-\boldsymbol{p})^0=\boldsymbol{p}^2$

La comparaison de *Pr1* et *Pr2* est déduite de l’étude de *Pr1 – Pr2*, soit du polynôme : $-\boldsymbol{p}^2\cdot\left(3\boldsymbol{p}^2-4\boldsymbol{p}+1\right)$.

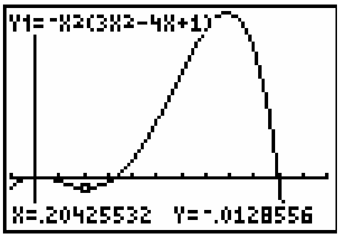
- Les zéros de la fonction $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{x}^2\cdot\left(3\boldsymbol{x}^2-4\boldsymbol{x}+1\right)$ peuvent être approchés avec la commande [TRACE],
- La recherche numérique des points d'intersection de cette courbe avec l'axe horizontal, le point maximum sont obtenus par [2nd] - [CALC].



***x*** : de –0.1 à 1.2 Xscl : 0.1
***y*** : de –0.05 à 0.18 Yscl : 0.05

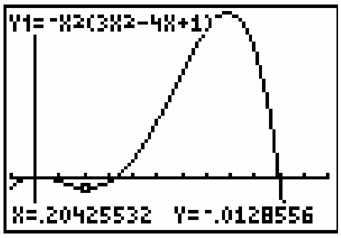
**Conclusions :**

il est clair que si $\boldsymbol{p}=0$ $\boldsymbol{Pr}\,1=\boldsymbol{Pr}\,2=0$ : les éléphants arrivent tous sains et saufs au sol !
et si $\boldsymbol{p}=1$, $\boldsymbol{Pr}\,1=\boldsymbol{Pr}\,2=1$: les éléphants s'enlisent tous !!




si $0 < x < \frac{1}{3}$, $Pr1 - Pr2 < 0$

les petits tamis sont plus sûrs .

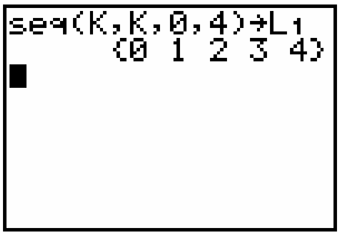



si $\frac{1}{3} < x < 1$, $Pr1 - Pr2 > 0$ ,

les grands tamis sont plus sûrs.

## 2. <u>Variable aléatoire X « nombre de raquettes perdues », espérance et variance</u>

- Les valeurs de la VA vont de 1 à 4. Les encoder dans la liste [L1] :

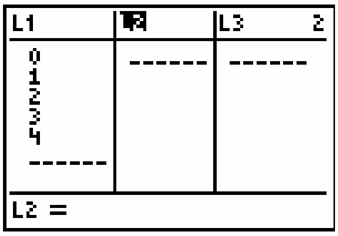


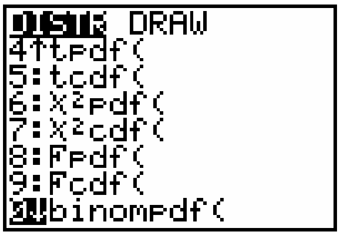

par 2nd [LIST] –5 – seq(K , K , 0 , 4) puis STO▸ 2nd [L1]

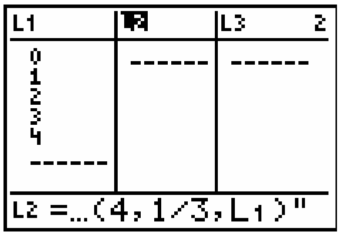
ou encore

en tapant directement les valeurs dans [L1].

- Calculer alors les valeurs de la fonction de distribution pour ***p*** = 1/3.



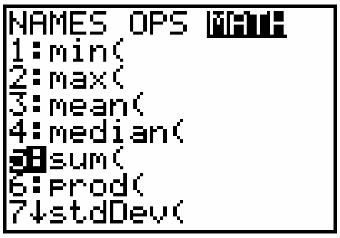



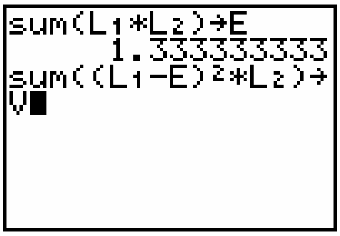



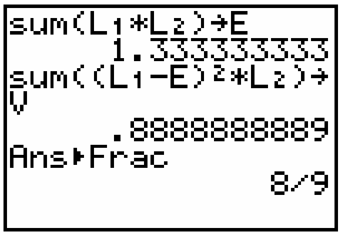

STAT-Edit-[L2] - ENTER

ALPHA "- 2nd [DISTR] 0 : binompdf(4,1/3, 2nd [L1])- ALPHA "

- A l'aide des formules définissant l'espérance mathématique et la variance, on peut vérifier (ou conjecturer) que dans le cas d'une loi binomiale, $E = n \cdot p$ et $V = n \cdot p \cdot (1 - p)$ .




- Somme des produits L1*L2 :

  2nd [LIST] -MATH - 5 : sum( 2nd [L1] * 2nd [L2] STO▸ ALPHA ***E***.

- Somme des produits (L1–***E***)² *L2 :

  2nd [LIST] -MATH - 5 : sum( ( 2nd [L1] - ALPHA E) ^ 2 * 2nd [L2] STO▸ ALPHA ***V***.

Les valeurs obtenues se mettent sous forme de fraction par le menu MATH – 1 : ▶Frac et on peut conclure que les formules sont bien vérifiées.