ANALYSE

Les suites.

Decamp Mauricette.
Solhosse Michelle

Niveau : ***5° Générale***

Objectifs ***Introduction d'une suite dans la calculatrice***
Visualiser une suite
Convergence d'une suite
Calcul de la somme des termes d'une suite
Applications :
La tour de Pise
La loi de Verhulst

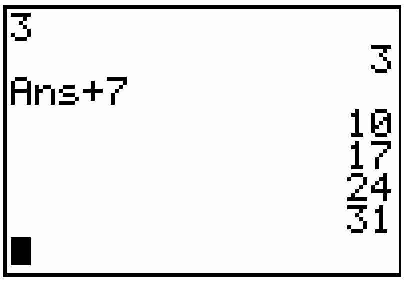
Calculatrice: ***TI 84+***

Références : ***Science et vie junior : spécial math(01/1999)***
Manuel de la TI 84+
Manuel scolaire : Terracher Analyse

1. Comment entrer une suite dans la calculatrice?

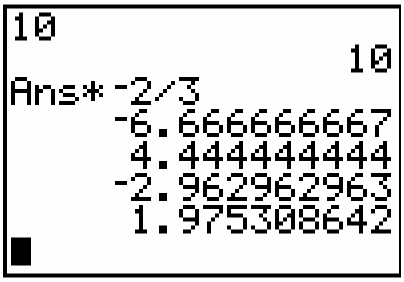
a) Suite arithmétique.

Soit une s.a. dont $u_1 = 3$ et $r = 7$.

	• Taper Â Í • Puis Ã ¬ Í Í Í … • Ans signifie "answer" = dernière réponse. • Les termes de la suite s'affichent mais on ne sait pas à quel rang on se situe. De plus, on ne sait pas utiliser les différents termes de la suite.

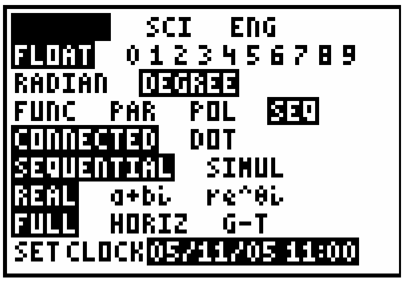
b) Suite géométrique.

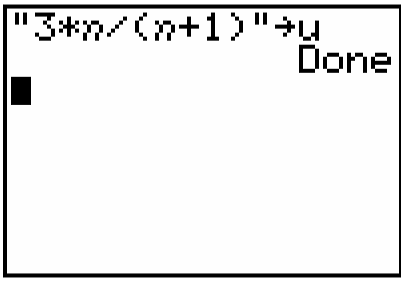
Soit une s.g. dont $u_1 = 10$ et $r = -\frac{2}{3}$

	• Taper À Ê Í • Puis Ë Ì Á ¥ Â Í Í … • Les termes de la suite s'affichent mais on ne sait pas à quel rang on se situe. De plus, on ne sait pas utiliser les différents termes de la suite.

c) Suite définie explicitement.

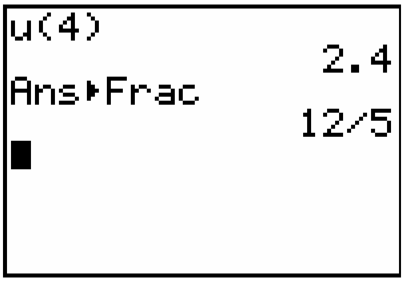
Soit la suite $(u_n) = \frac{3n}{n+1}; n \geq 1$

	• Placer la machine en mode séquence. Pour ce faire: taper z et à l'aide des flèches † ~ se placer sur SEQ. • Pour quitter cette fenêtre et revenir à la fenêtre d'algèbre: y .



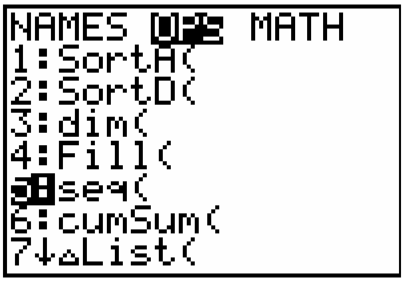
- *Pour introduire la suite:*

on utilise les guillemets (en vert) au-dessus de la touche « . Les suites se nomment nécessairement: u ou v ou w. Ces lettres se trouvent en bleu au-dessus des touches ¬, − ou ®.
Donc: ƒ [ã] Â Ë „ ¥ £ „ Ã À ¤ [ã] ¿ y [u]



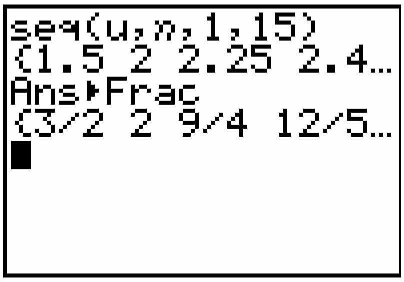
- *Pour obtenir un terme de le suite:*

pour le 4ème terme, par exemple, on tape: y [u] £ ¶ ¤ Í
Pour avoir la réponse en fraction: À Í



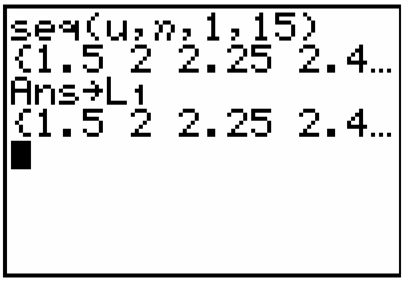
- *Pour obtenir plusieurs termes de la suite:*

On utilise la commande seq qui se trouve dans le menu LIST OPS.(*Sequence* signifie suite en anglais)
Taper: y [LIST] ~ · Í
Pour obtenir, par exemple, les 15 premiers termes de la suite:



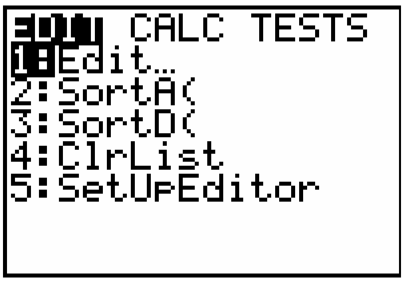
seq £ y [u] ¢ „ ¢ À ¢ À · ¤ Í

A l'aide des flèches, ~ ou | on peut voir tous les termes.

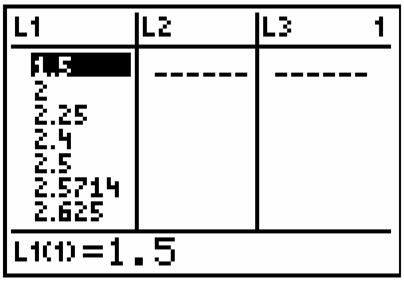
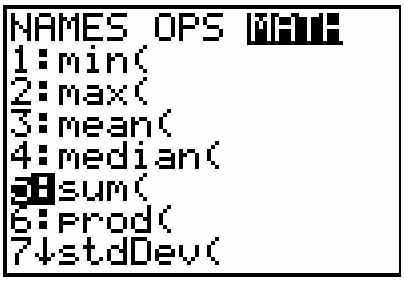
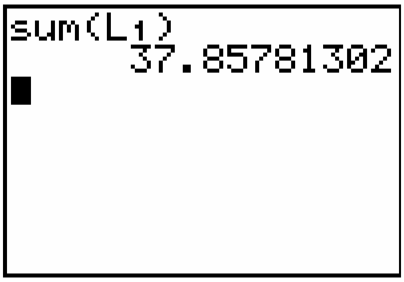
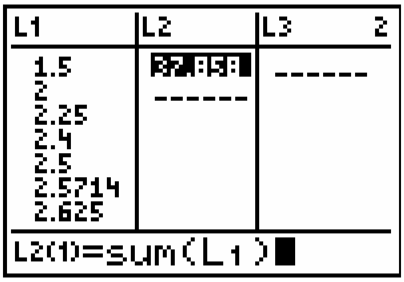


- *Pour visualiser les termes de la suite dans un tableau:*

On va stocker le termes de la suite dans une liste. Sur cette calculatrice, les listes se nomment: L_1, L_2 etc. Ces noms se trouvent en bleu sur les touches À, Á…
Après avoir calculer les termes, taper: ¿ y [L_1].



Pour accéder au tableau: …
Choisir Edit et puis Í

	Ce tableau fait office de tableur.
	• *Pour calculer la somme de termes de la suite:* Les 15 premiers termes de la suite se trouvent dans L_1. Pour calculer leur somme, il faut utiliser la commande sum. Elle se trouve dans le menu [LIST] MATH · .
	Taper: sum(y [L_1] ¤ í
	On peut aussi utiliser le tableau: Il faut se placer sur la 1ère cellule de la liste L_2 et taper sum(y [L_1] ¤ í

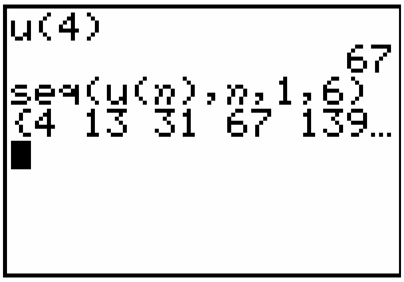
d) <u>Suite définie par récurrence.</u>

Soit la suite $(u_n) = \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2.u_{n-1} + 5\ ;\ n > 1 \end{cases}$

La machine doit se trouver en mode *"sequence"*(voir + haut)

- *Pour introduire la suite:*

on introduit les suites à l'aide de la touche:
o et on remplit comme ci-contre.
Si on donne la valeur 1 à *n*Min, comme u_1 = 4, on a : u(*n*Min) qui vaut 4.
Attention, pour introduire u(*n*)il faut bien utiliser le u bleu situé sur la touche **¬**.

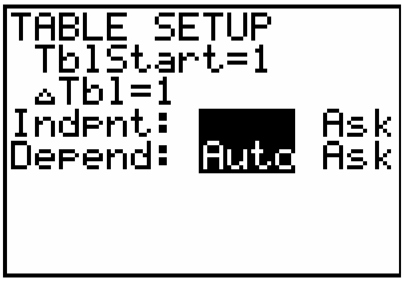


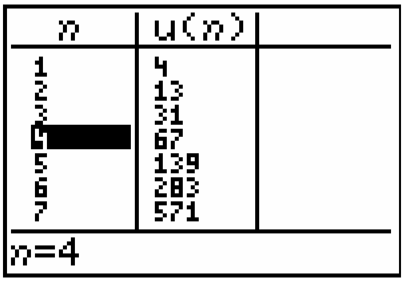
- *Pour obtenir un terme de le suite:*

pour le 4ème terme, par exemple, on tape:
y [u] **£ ¶ ¤ Í**

- *Pour obtenir plusieurs termes de la suite:*

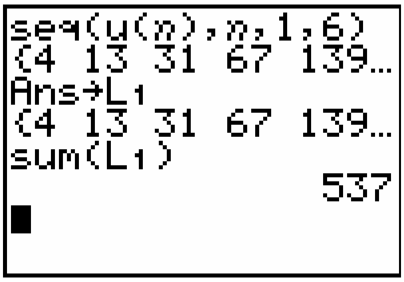
Taper: **y** [LIST] **~ · Í**
Pour obtenir, par exemple, les 6 premiers termes de la suite:
seq **£ ¸ y** [u] **£ „ ¤ ¢ „ ¢ À ¢ ¸ ¤ Í**





- *Pour visualiser les termes de la suite dans un tableau:*

Il faut utiliser le menu TBLSET qui se trouve en bleu au-dessus de la touche **p** et le menu TABLE qui se trouve en bleu au-dessus de la touche **s** .
Donc: **y** [TBLSET] puis remplir comme ci-contre.
Puis: **y** [TABLE]; les termes s'affichent.



- *Pour calculer la somme de termes de la suite:*

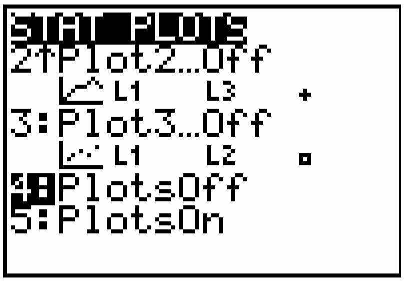
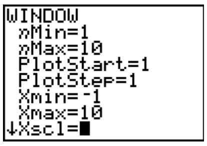
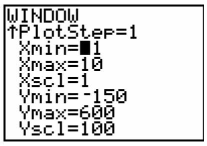
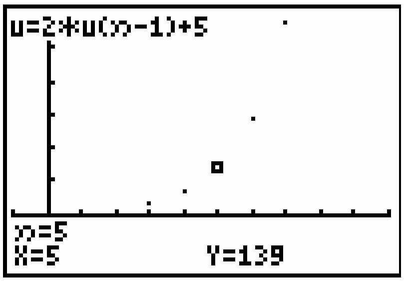
Il faut stocker les termes de la suite dans une liste puis en demander la somme (idem exemple précédent)

2. Comment représenter les termes d'une suite?

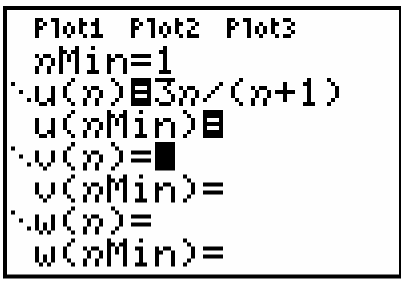
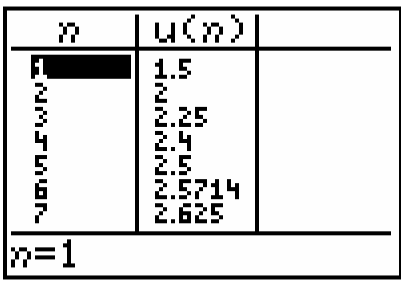
a) Dans un graphe (n;u(n)).

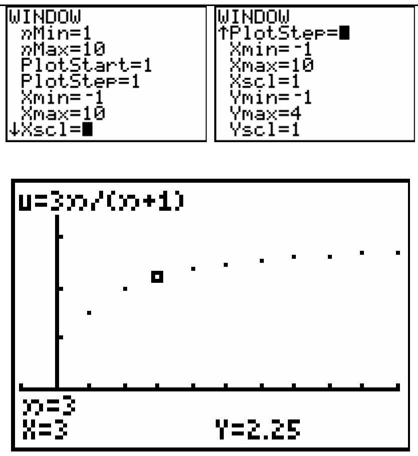
Le numéro du terme n sera mis en abscisse et la valeur du terme correspondant sera mis en ordonnée.

Suite définie par récurrence.

	• Il faut introduire la suite dans **o** . Gardons la même suite. Il faut effacer les graphiques utilisés précédemment: **y** [STATPLOT] et choisir PlotsOff.
 	Choisir la fenêtre graphique en tapant sur la touche **p** et remplir comme ci-contre:
	Taper sur la touche **s** . Si on tape sur **r** puis sur les flèches, les différentes valeurs des termes s'affichent.

Suite définie explicitement.

	• Reprendre la suite de la page 1 et l'introduire dans **o** . Pour choisir la fenêtre graphique, il est utile de voir les différentes valeurs prises par la suite: **y** [TABLE]
	Choisir la fenêtre graphique en tapant

	sur la touche **p** et remplir comme ci-contre: Taper sur la touche **s** puis **r** Que se passe-t-il si n devient grand?

b) Dans un graphe en *toile d'araignée-en escargot.*

(1) Construction graphique.

Soit la suite $(u_n)=\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2\sqrt{u_{n-1}}+1 \end{cases}$ Donc: $u_1 = 1$

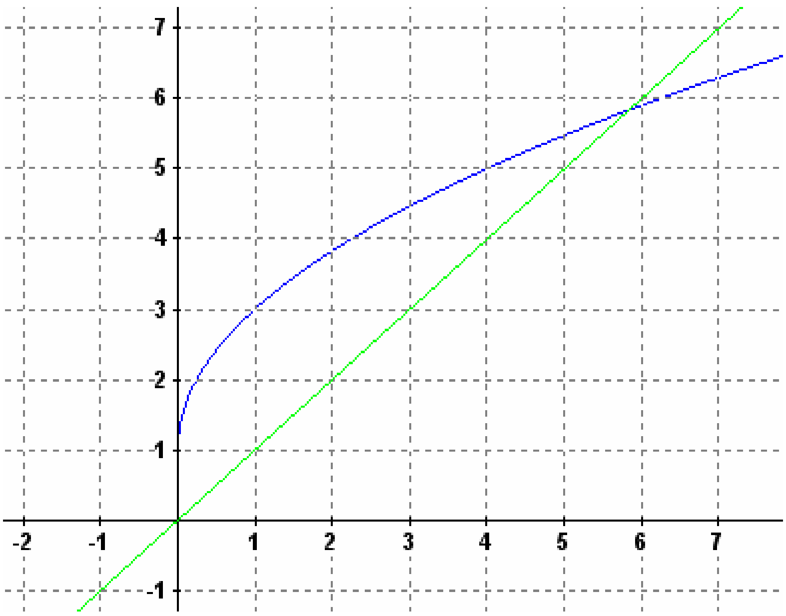
$u_2 = 2\sqrt{u_1}+1$

$u_3 = 2\sqrt{u_2}+1$

$u_4 = 2\sqrt{u_3}+1$

....

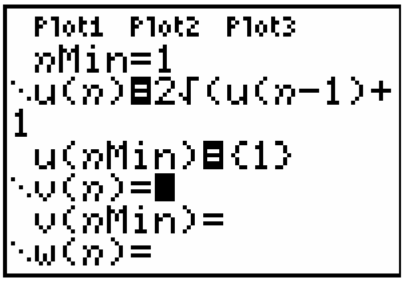
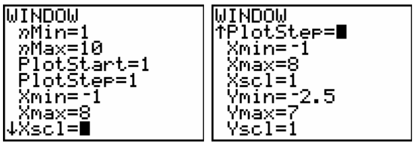
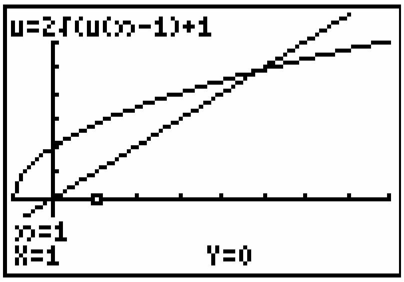
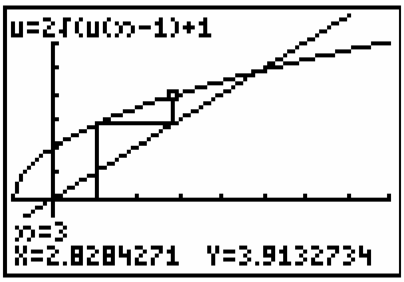
Au vu de ces égalités, il est judicieux de représenter dans un système d'axes (x,y) les graphes des fonctions $y = 2\sqrt{x}+1$ *et* $y = x$.



Ensuite, sur OX, on place u_1. Puisque $u_2 = 2\sqrt{u_1}+1$, u_2 est l'ordonnée de A. De A, tracer une horizontale jusqu'à y = x $\Rightarrow$ u_2 en abscisse . Puisque $u_3 = 2\sqrt{u_2}+1$, u_3 est l'ordonnée de B $\Rightarrow$ u_4 ……….

En pratique : « verticalement vers la courbe, horizontalement vers la droite d'équation y = x »

(2) A la calculatrice.

	• En anglais ce type de graphique s'appelle WEB (la toile). Choisir WEB dans le menu [FORMAT] (en bleu au-dessus de la touche **q**)
	• Introduire la suite dans **o** .
	• Choisir la fenêtre graphique en tapant sur la touche **p** et remplir comme ci-contre:
	• Taper sur la touche **s** puis **r**
	• Ensuite avec les la flèche **~** , faire apparaître les termes de la suite. Que se passe-t-il si n devient grand?

3. Application n°1: la tour de Pise.

« On laisse tomber du haut de la tour de Pise (63 mètres) une balle en caoutchouc. A chaque rebond, celle-ci rebondit d'un cinquième de sa hauteur. On demande
a) la hauteur atteinte après 1 rebond, 2 rebonds, 3 rebonds,…
b) la « distance » totale parcourue par la balle. »

Résolution :

a) Soit $u_0 = 63$ la hauteur initiale avant la chute.

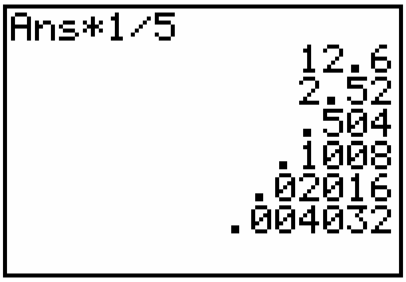
Notons u_1 la hauteur atteint par la balle après le premier rebond $\Rightarrow u_1 = 63.\frac{1}{5}$

$\Rightarrow u_2 = 63.\frac{1}{5}.\frac{1}{5} = 63.\left(\frac{1}{5}\right)^2$; … ; $u_n = 63.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

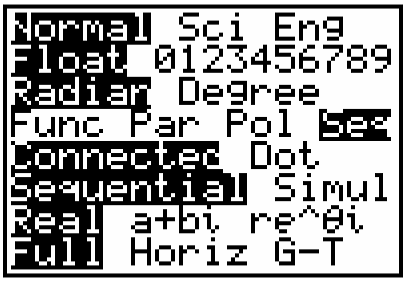
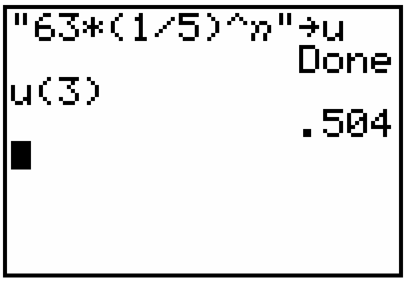
C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

Recherchons les différents termes de la suite.

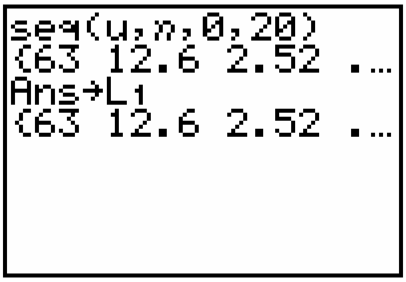
1ère méthode.

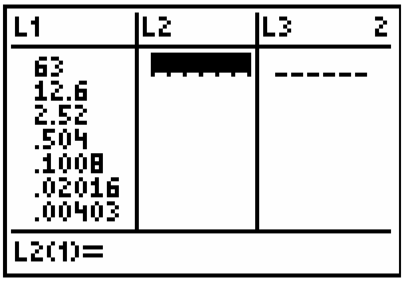
	• Taper : { ª ¸ p ¨ e z ¸ ¸ ¸ ¸ ¸ ¸ ……

2ème méthode

	• Se placer en mode Sequence, puis retourner à la fenêtre d'algèbre.
	• Taper : ƒ [ã] ¸ Â ¯ £ À ¥ · ¤ › „ [ã] ¿ y [u] • Pour obtenir , par exemple, le 3ème terme, taper u(3).

Pour obtenir plusieurs termes de la suite :





- Pour voir un certain nombre de termes de la suite, on utilise la commande seq. On la trouve dans **y** [LIST] OPS · ou **y** [CATALOG] S
- Taper :seq (**y** [u] **b** „ **b Ö b © µ d** ¸
- **§ y** [L1]
- Pour ouvrir l'éditeur de listes:

… puis choix de Edit

b) <u>Distance totale parcourue par la balle.</u>

On note d_i la distance parcourue après i rebonds. On fabrique une nouvelle suite.

Distance parcourue

après 1 rebond : $d_1 = 63 + u_1 + u_1 = 63 + 2.u_1 = 2.(63 + u_1) - 63$

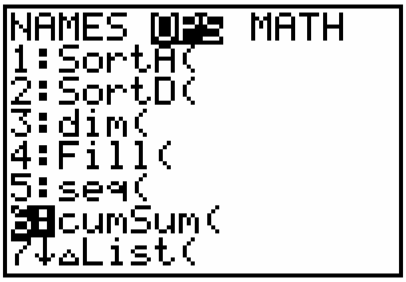
après 2 rebonds : $d_2 = 63 + 2.u_1 + 2.u_2 = 2.(63 + u_1 + u_2) - 63$

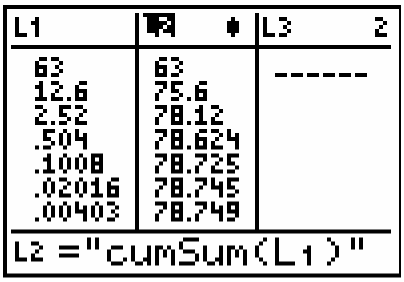
………………..

après n rebonds : $d_n = 2.(63 + u_1 + u_2 + ... + u_n) - 63$

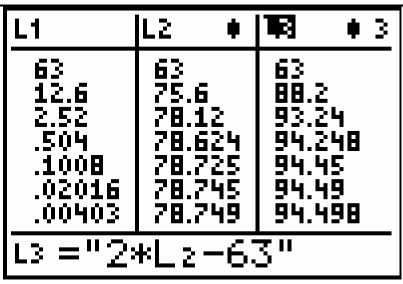
En fait, on voit apparaître <u>dans les parenthèses</u> les *sommes cumulées* des termes de la suite u(n).

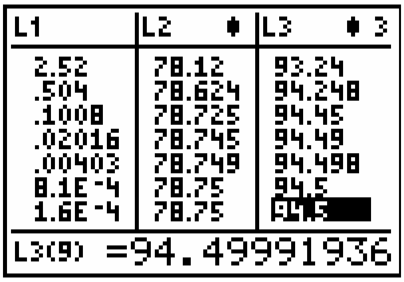
A la calculatrice :

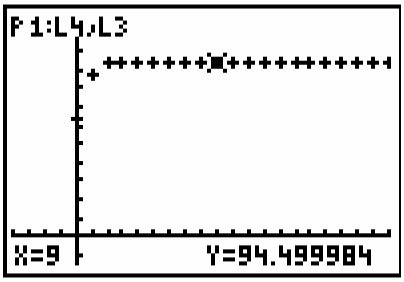




- On utilise la commande cumSum que l'on trouve dans **y** [CATALOG] C ou dans **y** [LIST] OPS ¸ .
- Dans l'éditeur de listes, se placer sur L_2 et taper cumSum(**y** [L_1]







- La distance effectuée après n rebonds sera donnée par
 Á ¯ y [L_2] ¹ ¸ Â ¸

A l'aide des flèches, on peut voir ce que devient cette distance lorsque n grandit.

On peut supposer que la distance effectuée par la balle s'approche de *94,5 m.*

La théorie sur les limites des suites viendra renforcer cette conjecture.

On dira:
la suite des distances converge vers 94,5.

4. Application n°2: la loi de Verhulst.

Proies et prédateurs.

« Pourquoi, telle année, les sauterelles, les méduses, les souris et autres pucerons se mettent à pulluler ? Et pourquoi l'année d'après, tout redevient paisible ?
C'est au siècle dernier que le mathématicien belge, Pierre-François Verhulst, a levé une partie du secret des populations animales. »

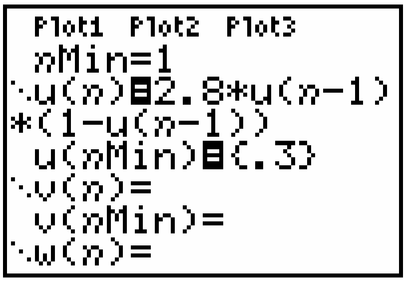
Nous allons nous intéresser à un cas simple : dans un grand jardin peuplé de pucerons, lâchons des coccinelles.

La loi de Verhulst est la suivante : $u_n = 4\,p.u_{n-1}.(1-u_{n-1})$ où u_{n-1} est la densité de population de coccinelles une certaine année et u_n la densité de population l'année suivante. Cette densité est le rapport du nombre de coccinelles par rapport à la taille maximale de la population. C'est donc un nombre compris entre 0 et 1.
Le paramètre p dépendra de certaines circonstances, par exemple la vitesse de reproduction des prédateurs relativement aux proies.

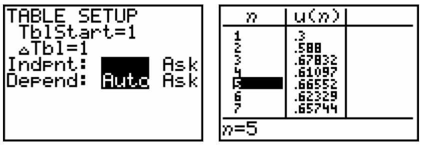
Nous allons étudier cette loi pour différentes valeurs du paramètre p.

1er cas : p = 0,7

La suite est $u_n = 2{,}8.u_{n-1}.(1 - u_{n-1})$ et nous supposons une population actuelle de 0,3 c'est-à-dire 300 coccinelles pour une population maximale de 1000.
Utilisons la calculatrice pour observer l'évolution du nombre des bêtes à bon Dieu.

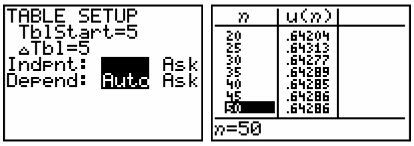


- Introduire la suite dans **o** .



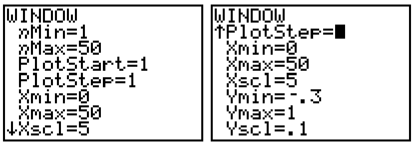
- Pour visualiser les termes de cette suite, taper **y** **&** et remplir selon votre choix d'année en année, ou de 5 ans en 5 ans.
- Ensuite, taper **y** **'** , les termes de la suite apparaissent les uns après les autres.
- La population va-t-elle se stabiliser ?

Regardons les termes de la suite pour des valeurs plus grandes de n .
On remarque une stabilisation vers le nombre 0,643 ?

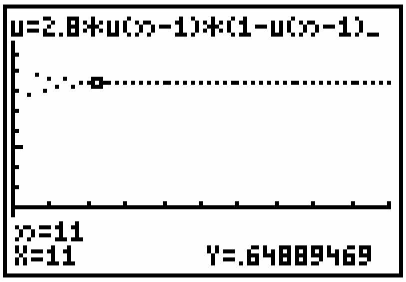


- Visualisons les termes de la suite sur un graphique (n,u(n)).

Se remettre en format TIME: **y** [FORMAT] et choisir TIME.
Choix d'un fenêtre: **p** et remplir comme ci-contre
n ∈ [0,50] par pas de 1
X ∈ [0,50] avec une échelle de 5
Y ∈ [-0,3 ; 1] avec pour échelle 0,1

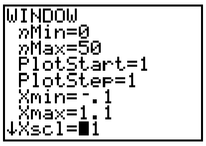


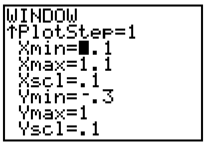
- Pour voir le graphe : **s**
- En tapant sur **r** et en utilisant **~** on obtient les valeurs des termes de la suite.



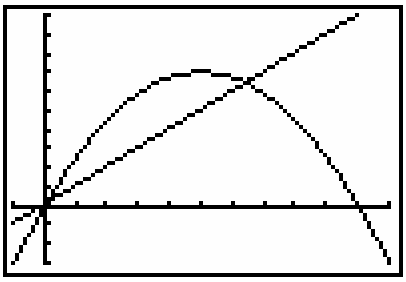
Pour comprendre ce qu'il se passe pour de grandes valeurs de n, il est possible avec la calculatrice de représenter les termes de la suite sur un diagramme en escargot .

- Se placer dans **y** [FORMAT] puis choisir Web

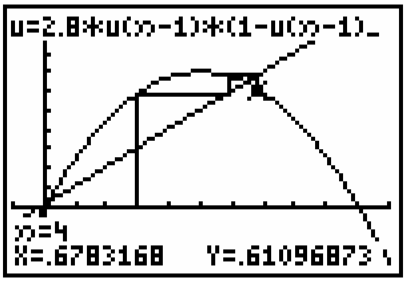




- Choisir ensuite la fenêtre graphique comme ci-contre.
  $n \in [0{,}50]$ par pas de 1
  $X \in [-0{,}1 \,;1{,}1]$ avec une échelle de 0,1
  $Y \in [-0{,}3 \,;\, 1]$ avec pour échelle 0,1



- Puis taper **s**
- Les graphes apparaissent.



- Ensuite , taper **r** ~ ~ ~ ~ ~ ~…….

La suite converge vers 0,643.

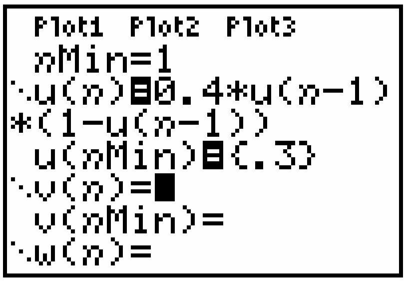
Intéressons-nous aux points d'intersection de la droite et de la parabole ?
Ils sont solutions de l'équation : $2{,}8.x.(1 - x) = x$

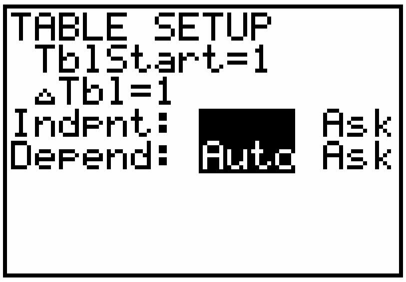
$-2{,}8x^2 + 1{,}8x = 0$ $-0{,}2x.(14x - 9) = 0$	• $X = 0$ ou $X = \dfrac{9}{14} \approx 0{,}643$

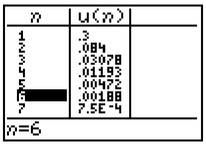
Pour $u_0 = 0$ ou $\dfrac{9}{14}$, l'itération tourne court (puisque Y = X), plus rien ne bouge : coccinelles et pucerons ont des effectifs constants d'une année à l'autre.
Il y a plus étrange. En partant de n'importe quelle valeur initiale de u_0 (comprise entre 0 et 1), on est irrésistiblement attiré par $\dfrac{9}{14}$. Pucerons et coccinelles sont en phase stable au bout d'un certain temps.
C'est un point fixe ATTRACTIF.

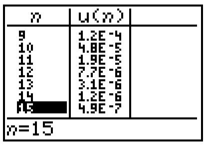
Le point X = 0 est lui un point fixe REPULSIF.

2ème cas : p = 0,1





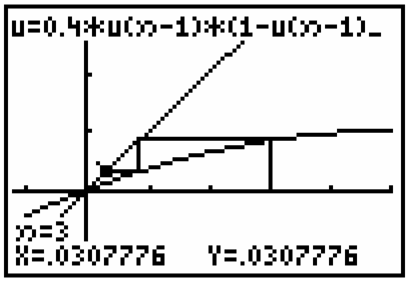




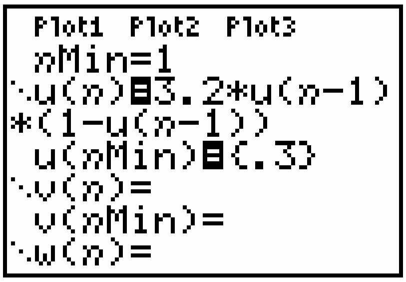
- o et remplaçons 2,8 par 0,4.
Visualisons les termes de la nouvelle suite.

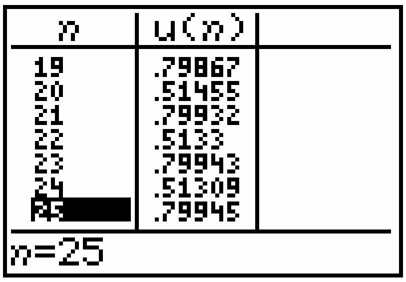
- y & et remplir selon votre choix
puis ¸ .

- Les termes deviennent de plus en plus petit. *La suite converge vers zéro.*
- Le point X = 0 est ici un point ATTRACTIF : les coccinelles disparaissent….



3ème cas : p = 0,8



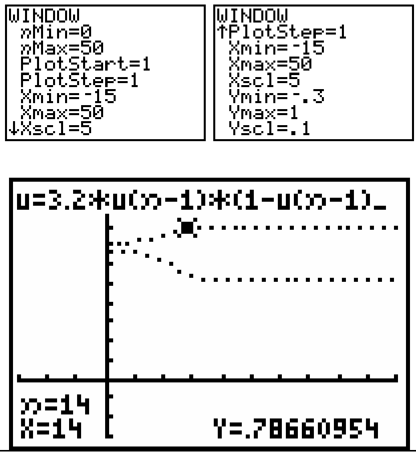


- On fait de même que précédemment et on observe la population après 20 itérations.

- y & et remplir selon votre choix
puis ¸ .

On obtient deux valeurs qui s'alternent sans presque bouger : 0,799 et 0,513.

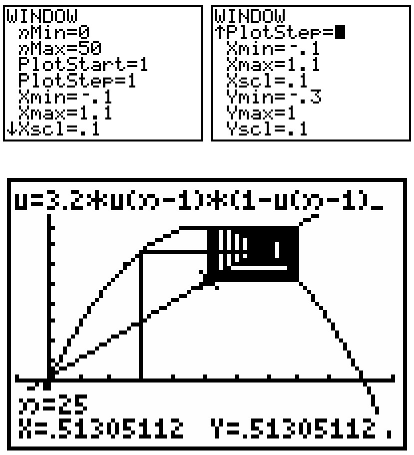
Voyons cela d'abord sur un graphe (n,u(n)) sur un graphe .



- Dans **y** [FORMAT], choisir Time
- Choix d'un fenêtre: **p** et remplir comme ci-contre
  n ∈ [0,50] par pas de 1
  X ∈ [-15,50] avec une échelle de 5
  Y ∈ [-0,3 ; 1] avec pour échelle 0,1
- Pour voir le graphe : **s**
- En tapant sur **r** et en utilisant **~** on obtient les valeurs des termes de la suite.

L'effectif des petites bêtes oscillent entre deux valeurs fixes, quelle que soit la valeur initiale, à deux exceptions près(voir plus loin). C'est ce que l'on appelle un 2-cycle attractif. Cela pourrait signifier que , les années paires, il y aurait « beaucoup » de coccinelles et que, les années impaires, il y en aurait « peu ».

Observons le diagramme en escargot pour comprendre le pourquoi de ces 2 valeurs.



- Se placer dans **y** [FORMAT] puis choisir Web
- Choisir ensuite la fenêtre graphique comme ci-contre.
  n ∈ [0,50] par pas de 1
  X ∈ [-0,1 ;1,1] avec une échelle de 0,1
  Y ∈ [-0,3 ; 1] avec pour échelle 0,1
- Puis taper **s**
- Ensuite , taper **r** **~ ~ ~ ~ ~ ~**…….

On a beau regarder le graphe de la parabole, 0,513 et 0,799 n'occupent pas de position particulière.
En revanche, comme ce graphe coupe toujours y = x en deux points, on peut être certain que si on donne à u_0 l'une de ces 2 valeurs, rien ne bougera d'une année à l'autre. Ce sont les deux exceptions vues plus haut. Seulement, cette fois-ci, ces points ne sont pas attractifs. Si vous prenez une valeur ne serait-ce qu'un chouia différente, les valeurs s'éloigneront, et tomberont dans le 2-cycle. Il y a bien sur une explication mathématique qui sort du cadre de ce cours.

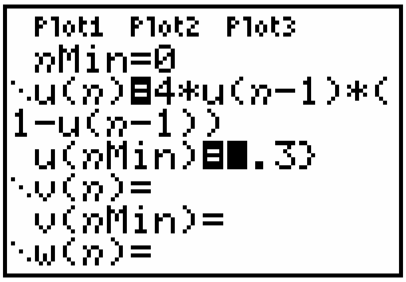
4ème cas : p = 0,875

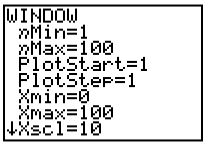
Ce cas est fort semblable au précédent. Toutefois, au bout d'un certain temps, on observe non plus deux valeurs mais bien 4 valeurs qui reviennent chacune à leur tour. C'est un 4-cycle attractif. Tous les 4 ans, coccinelles et pucerons repasseraient donc par un même niveau de population.

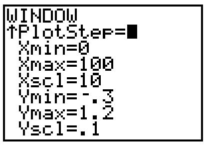
En résumé.

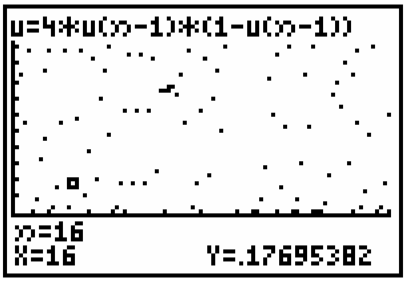
Au fond, le destin des petites bêtes de jardin dépend du paramètre p. Lequel possède des valeurs très spéciales(entre 0 et 1), dites « valeurs frontières ».
Entre ces valeurs, la suite des itérées se comporte de façon très diverses. Ne parlons que des points ou cycles « attractifs ».
Nous avons d'abord rencontré un point attracteur, puis un 2-cycle avec 2 points attracteurs, un 4-cycles avec 4 points attracteurs, etc.
Plus étrange, au delà d'une certaine valeur de p, la suite des itérées semble devenir foldingue, anarchique, chaotique. On ne peut plus rien prévoir du tout.

Essayons avec la valeur limite **p = 1.**

<table>
<tr>
<td>








</td>
<td>
• On va changer u(n) dans o

Dans y [FORMAT], choisir Time

• Choisir ensuite la fenêtre graphique comme ci-contre.

• s
</td>
</tr>
</table>

C'est le CHAOS !