Simulation du jeu de basket sur la TI 89.

Renée Gossez.

Nous proposons ici deux formulations différentes du même problème, la première, destinée à des élèves de 4ème année du secondaire, la seconde, un peu plus élaborée, à des élèves de 5ème, option 6 heures semaine.

La résolution du problème s'est faite dans chacune des deux classes en utilisant une calculatrice TI89 pour effectuer certains calculs et vérifier l'exactitude des réponses trouvées par les élèves. Nous en faisons le compte-rendu dans les pages qui suivent.

L'objectif poursuivi dans ce genre d'exercice est d'habituer les élèves à appliquer leurs connaissances mathématiques à une situation-problème. L'apport de la calculatrice est double :

- elle permet à l'élève qui a trouvé une stratégie pour résoudre le problème, de ne plus faire d'erreurs de calcul;

- elle fournit une approche dynamique du problème qui donne la possibilité de s'autocorriger.

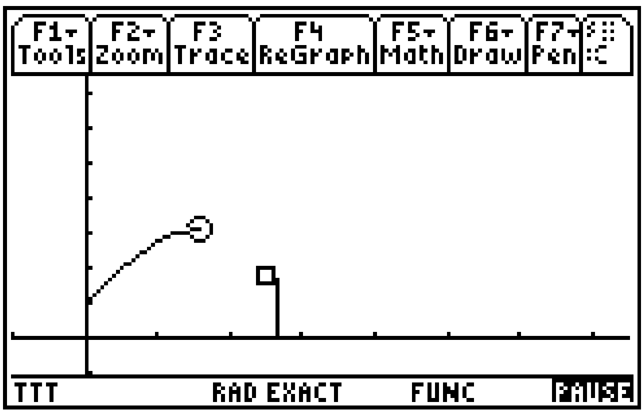


Figure 1

Premier énoncé du problème.

Un panier de basket est suspendu à un piquet métallique, à une hauteur de 2m20.
Un joueur qui se trouve à 5 mètres du pied du piquet lance un ballon d'un hauteur de 1m80.
On suppose que la résistance de l'air est négligeable, que le ballon et le panier sont assimilables à des points matériels et que la trajectoire du ballon est entièrement située dans le plan formé par le piquet et la position initiale du ballon.
Dans un repère bien choisi, déterminer l' équation d'une trajectoire possible du ballon, pour qu'il atterrisse dans le panier.

Second énoncé.

Un panier de basket est suspendu à un piquet métallique, à une hauteur de 2m20.
Un joueur qui se trouve à 5 mètres du pied du piquet lance un ballon d'un hauteur de 1m80.
On suppose que la résistance de l'air est négligeable, que le ballon et le panier sont assimilables à des points matériels et que la trajectoire du ballon est entièrement située dans le plan formé par le piquet et la position initiale du ballon.

1° Dans un repère adéquat, écrire les équations de la trajectoire d'un ballon lancé avec une vitesse initiale v_i et un angle de tir θ avec l'horizontale;

2° Déterminer une condition sur l'angle θ et la vitesse v_i pour que le ballon tombe dans le panier.

3° Déterminer, en fonction de θ, l'angle que fait la trajectoire du ballon avec l'horizontale au moment où le ballon atterrit dans le panier.

Préparation de l'écran GRAPH.

Nous mettons l'origine O du repère à la verticale de la position du ballon, l'axe Ox est horizontal et orienté vers le panier de basket, l'axe Oy est perpendiculaire à Ox et passe par le ballon.

Créons le tableau Data que voici

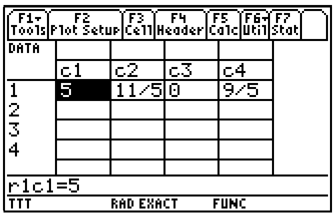


Figure 2

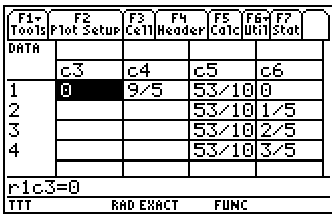


Figure 3

Les colonnes c1 et c2 contiennent les coordonnées du panier , les colonnes c3 et c4, celles de la position initiale du ballon.
Les colonnes c5 et c6 permettent de représenter le piquet.

Définissons le type de graphique qui doit correspondre au tableau Data créé ci-dessus :

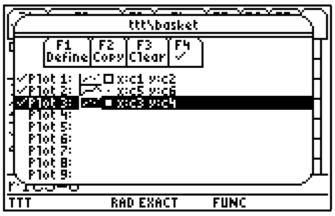


Figure 4

ce qui donne, dans une fenêtre bien choisie :

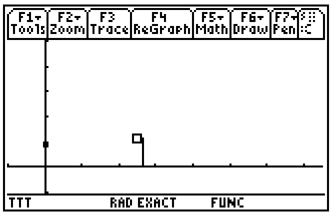


Figure 5

Résolution du problème en 4ème.

Les élèves arrivent assez vite à la conclusion que la courbe qui représentera le mieux la trajectoire du ballon pourrait être une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ qui passe par les points de coordonnées $(0,1.8)$ et $(5,2.2)$.

Ils procèdent aux calculs suivants :

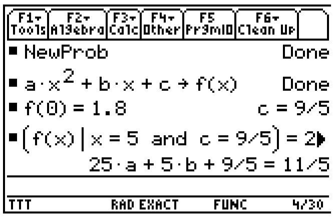


Figure 6

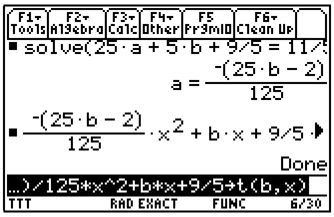


Figure 7

et constatent qu'il y a une infinité de paraboles qui satisfont aux contraintes.
Leur équation générale est donnée par : $y = -\dfrac{25b-2}{125}x^2 + bx + \dfrac{9}{5}$.

Pour obtenir une des trajectoires, il suffit de donner à b une valeur choisie au hasard:

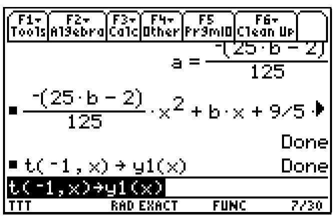


Figure 8

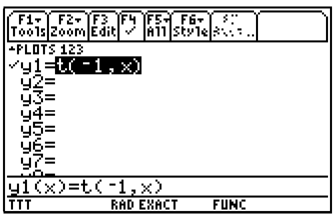


Figure 9

et de tracer le graphique de la courbe correspondante :

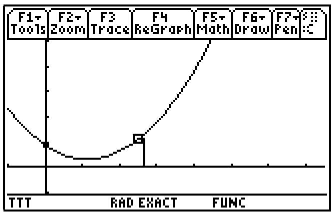


Figure 10

Cet élève a oublié une condition, à savoir

que $-\dfrac{25b-2}{125} < 0 \Leftrightarrow b > \dfrac{2}{25}$!!

Nouveaux essais :

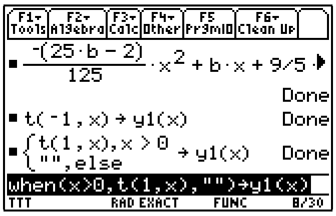


Figure 11

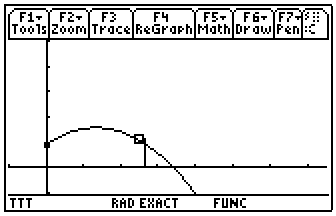


Figure 12

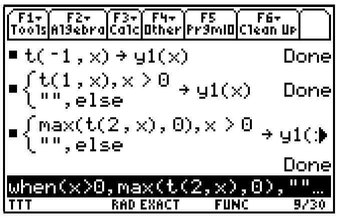


Figure 13

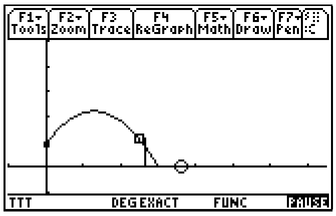


Figure 14

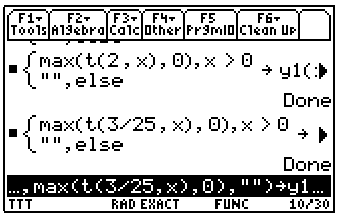


Figure 15

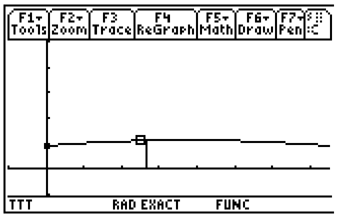


Figure 16

Cette dernière solution bien que correcte selon les conventions de l'énoncé, est moins réaliste.
Le ballon frappe le panier mais n'y entre pas.
On pourrait affiner le problème en imposant que le ballon atterrisse dans le panier avec un angle d'incidence donné.
Ceci est trop compliqué pour des élèves de 4ème mais est envisageable avec des élèves de 5ème.

Résolution du problème en 5ème.

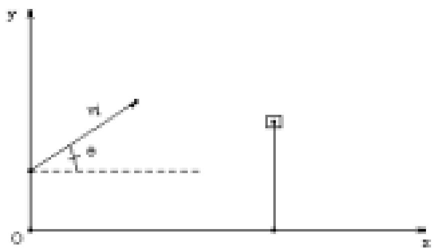
1° Si la résistance de l'air est négligeable, le mouvement d'un projectile dépend uniquement de sa position initiale (x_i, y_i), de sa vitesse initiale $\vec{v}_i$ et de l'accélération gravitationnelle.
La position du projectile est déterminée à tout instant t par les équations

$$\begin{cases} x = v_{ix} \cdot t + x_i \\ y = v_{iy} \cdot t - \dfrac{1}{2} g \cdot t^2 + y_i \end{cases}$$

où v_{ix} et v_{iy} sont les composantes du vecteur vitesse respectivement suivant l'axe Ox et l'axe Oy et où g est l'accélération de la pesanteur.

Voir :
Physique, Kane et Sternheim, page 33
http://www-personal.umich.edu/~jlhoffmn/physics/clpromo1.htm
http://www3.adnc.com/~topquark/fun/JAVA/trajplot/trajplot.html
http://library.thinkquest.org/15433/unit1/1-5.htm
http://www.venus.net/~batehi2/classes/PhyNet/Mechanics/Projectiles/ProjectileIntro.html
http://www.sasked.gov.sk.ca/docs/physics/u5c3phy.html

Dans notre cas,



Les équations paramétriques du mouvement de notre ballon sont donc :

$$\begin{cases} x = v_i \cos\theta \cdot t \\ y = v_i \sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 + 1.8 \end{cases}$$

L'élimination du paramètre t donne $y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_i^2} \cdot (1 + tg^2\theta) \cdot x^2 + tg\theta \cdot x + 1.8$ qui est l'équation cartésienne d'une parabole.

2° La trajectoire du ballon passera par le panier si $\begin{cases} 5 = v_i \cos\theta \cdot t \\ 2.2 = v_i \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 + 1.8 \end{cases}$ (1)

De (1) découle la relation cherchée, à savoir $v_i^2 = \dfrac{125g}{50\sin\theta\cos\theta - 4\cos^2\theta}$ (2)

Les élèves qui tentent d'obtenir la relation (2) avec la calculatrice comprennent vite qu'il vaut mieux, dans ce cas-ci, procéder à la main !

Par contre, la calculatrice va leur permettre de vérifier que le résultat trouvé est correct, en simulant le lancer du ballon :

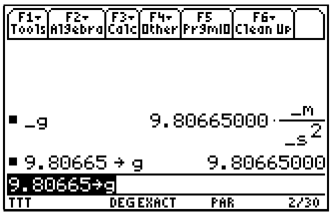


Figure 17

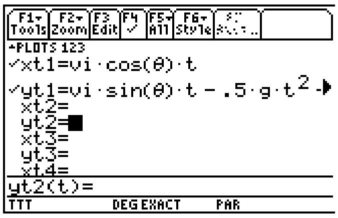


Figure 18

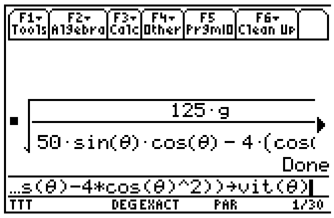


Figure 19

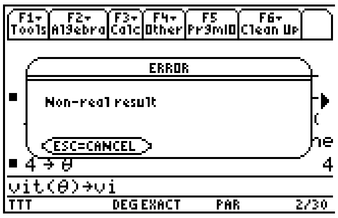


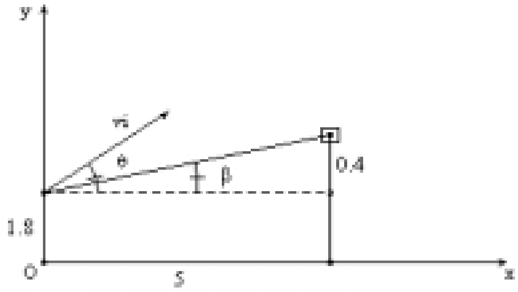
Figure 20

Pour que la relation (2) ait un sens, il y a une petite condition à poser sur θ !

Quelle est cette condition ?

$$50\sin\theta\cos\theta - 4\cos^2\theta > 0 \Leftrightarrow tg\theta > \frac{2}{25} \Leftrightarrow 4.5739° < \theta < \frac{\pi}{2} \qquad (\text{car } 0 < \theta < \frac{\pi}{2})$$

Quelle est la signification "physique" de cette condition ?



Il est clair que l'angle de tir doit être supérieur à β pour que le ballon ait des chances d'atteindre le panier !

Or $tg\beta = \dfrac{0.4}{5} = \dfrac{2}{25}$ …….

Nouvel essai :

Cela marche !

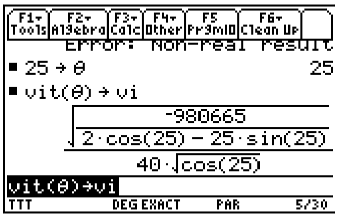


Figure 21

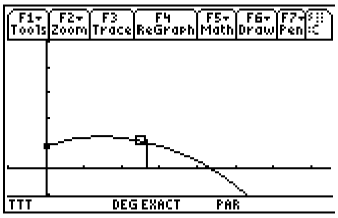
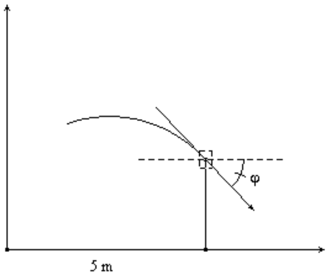


Figure 22

3° Occupons-nous maintenant de l'angle d'incidence du ballon dans le panier.



Soit φ l'angle d'incidence du ballon dans le panier.

Rappelons que l'équation cartésienne de la trajectoire du ballon est donnée par

$$y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{v_i^{\,2}}\cdot(1+\mathrm{tg}^2\theta)\cdot x^2 + \mathrm{tg}\theta\cdot x + 1.8 \quad \text{lorsque } v_i$$

vérifie la condition (2) de la page 6.

On a : $\mathrm{tg}\varphi = y'(5)$.

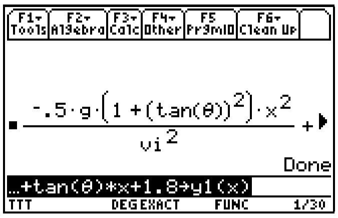


Figure 23

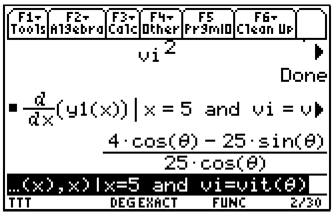


Figure 24

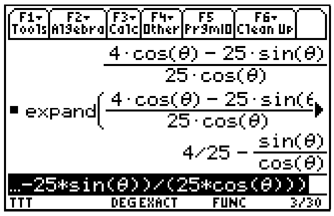


Figure 25

L'angle d'incidence du ballon est donc donné par $\boxed{\mathrm{tg}\varphi = \frac{4}{25} - \mathrm{tg}\theta}$

Références.

Charles Vonder Embse and Arne Engebretsen, A mathematical look at free throw using technology, The Mathematics Teacher, Vol. 89, N°9, December 1996, p. 774 – 779.

Michele Impedovo, Colpire il bersaglio, T^3 and Ohio State University Summer School, Columbus, Juillet 1998.

Joseph Kane et Morton Sternheim, Physique, InterEditions, Paris,1986.